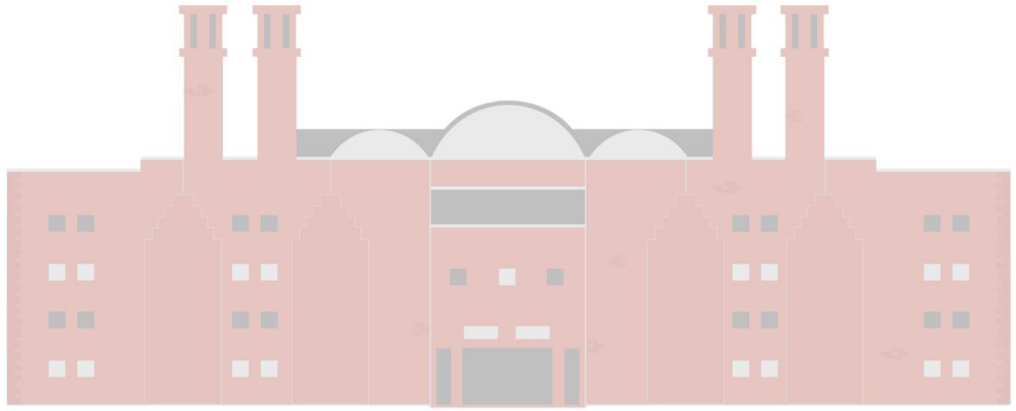
التَحليل الرياضِي ٣

المحاضرة السابع عشر

٧ صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/11/06

طرق حساب الرواسب :

إذا كان الكسر $f=\frac{g(z)}{h(z)}$ حيث $h\,,g$ تحليليان عند $z=a$ ، $g(a)\neq 0$ ، $h(a)=0$

$\Leftarrow$ $z=a$ شاذة غير قابلة للإزالة.

نميز الحالات التالية:

- إذا كان $h'(a)\neq 0 \Leftarrow a$ قطب من الدرجة الأولى (بسيط) ويكون الراسب

$$res(f,a)=\frac{g(a)}{h'(a)}$$

- إذا كان $h'(a)=0$ بينما $h"(a)\neq 0 \Leftarrow a$ قطب من المرتبة (٢)
- $f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^n}$ $\Leftarrow$ (ينعدم المقام عند كل المشتقات بالنسبة للنقطة a إلا المشتق النوني)

$h^{(n)}(z)=n!\neq 0 \Leftarrow a$ قطب من المرتبة n

$$res(f,a)=\frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

مثال (١): عين وصنف النقاط الشاذة وعين الراسب $\boldsymbol{f(z)=\cot(z)}$

الحل:

$$f(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)}=\frac{g}{h}$$

$h\,,g$ تحليليان دوماً ، النقاط الشاذة $z=\pi k : k\in z$

$$g(\pi k)=(-1)^k$$

$$h'=\cos z \Rightarrow h'(\pi k)\neq 0$$

حسب الحالة الأولى $z=\pi k$ أقطاب بسيطة لـ f

$$res(f,\pi k)=\frac{g(\pi k)}{h'(\pi k)}=\frac{(-1)^k}{(-1)^k}=1$$

$$(z-1)^2 2!)$$

مثال (٢): عين وصنف النقاط الشاذة للتابع واحسب الراسب

$$f(z)=z\cos(\frac{1}{z-1})$$

النقاط شاذة $z=1$ (أساسية)

$$f=[(z-1)+1][1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\cdots]$$

نشر بجوار z 1

rbd
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$$= (z-1) + 1 - \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z-1)^2} \dots \dots \dots$$

تحليلي | ⟶ رئيسي

$$res(f,1) = -\frac{1}{2}$$

مثال (٣):

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{z^3(z^2+1)}}$$

الحل:

$z = 0$ قطب من المرتبة ٣

$z = \pm i$ قطبان بسيطان

$$z = 0 \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{z^2+1}}{z^3} = \frac{g(z)}{z^3} \text{ " الحالة الثالثة "}$$

$$res(f,0) = \frac{g''(0)}{2!} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$z = i \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{z^3}}{z^2+1} \Rightarrow res(f,+i) = \frac{\frac{1}{i^3}}{2i} = \frac{1}{2}$$

$$z = -i \Rightarrow f = \frac{\frac{1}{z^3}}{z^2+1} \Rightarrow res(f,-i) = \frac{\frac{1}{(-i)^3}}{-2i} = \frac{1}{2}$$

مبرهنة الرواسب:

ليكن $f(z)$ تحليلي في المنطقة المغلقة D المحاطة بـ L (مستمر وبسيط) باستثناء عدد من النقاط الشاذة الغير قابلة للإزالة $z_1, z_2, \dots\dots z_n$ عندئذ

$$\oint_L f\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} [res(f, z_k)]$$

مثال (١) "دورة" :

$$\boldsymbol{I = \int_{||z-1||=1} \frac{dz}{z^6+1}}$$

خطوات الحل

١) **الرسم**

٢) **إيجاد المنطقة التي يكون التابع فيها تحليلياً .**

التابع تحليلي عدا حلول المعادلة

$$z^6 + 1 = 0 \Rightarrow z^6 = -1 = e^{i(\pi+2\pi k)}$$

$$\Rightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k\right)} \;:\; k \in z$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi}$$

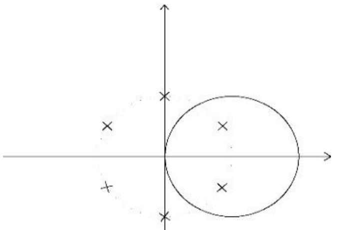
$$z_3 = \bar{z_0} = e^{i\frac{7}{6}\pi} = e^{-i\frac{5}{6}\pi}$$

$$z_4 = \bar{z_1} = e^{\frac{i3}{2}\pi} = -i$$

$$z_5 = \bar{z_2} = e^{\frac{i11}{6}\pi} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

٣) **نمثل النقاط على الرسم .**

(للمساعدة في معرفة مواقع الجذور دون اللجوء إلى الحل الجبري نرسم دائرة نصف قطرها (١) ومركزها O ونحدد عليها الجذور حسب زاويتها حيث تقع الجذور على محيط الدائرة)



f تحليلي في $||z-1|| \le 1$ باستثناء z_5 , z_0

$$res\left(f, e^{\frac{i\pi}{6}}\right) = \frac{g(e^{i\frac{\pi}{6}})}{h'(e^{i\frac{\pi}{6}})} = \frac{1}{6e^{5i\frac{\pi}{6}}}$$

$$res\left(f, e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{g(e^{i\frac{\pi}{6}})}{h'(e^{i\frac{\pi}{6}})} = \frac{1}{6e^{-\frac{5}{6}\pi i}}$$

نستخدم نظرية الرواسب

$$I = \frac{2}{3}\pi i\left(\frac{1}{6e^{-\frac{5}{6}\pi i}} + \frac{1}{6e^{-\frac{5}{6}\pi i}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi i\left(\frac{e^{-\frac{5}{6}\pi i} + e^{\frac{5}{6}\pi i}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi i \cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{\pi i}{\sqrt{3}}$$

مثال(٢):

$$I = \oint_L \frac{dz}{\frac{1}{2} - \sin^2(\frac{z}{2})}$$ **حيث L مربع رؤوسه النقاط $\pm 2 \pm i$**

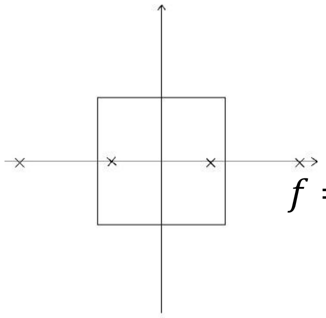
النقاط الشاذة $\frac{1}{2} - \sin^2\frac{z}{2} = 0$

$\Rightarrow f = \frac{2}{\cos z}$ $\quad$ $\frac{\cos z}{2} = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in z$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

L أملس جزئياً

fتحليلي على المربع وداخله باستثناء النقطتين $\pm\frac{\pi}{2}$



$$f=\frac{2}{\cos z}=\frac{g}{h}\quad,\quad h'=-\sin z\Rightarrow\begin{cases}h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\\ h'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$$

$$res\left(f,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-2$$

$$res\left(f,-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{g\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{h'\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=2$$

$$I=2\pi i(-2+2)=0$$

مثال ٣:

$$\boldsymbol{I=\oint_{||z||=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)\cosh\frac{1}{z}dz}$$

$z=0$ شاذة للتابع f

$$f=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{4!\,z^4}+\cdots\right)$$

$$=z+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z^3}+\cdots$$

z تحليلي و $\frac{1}{z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z^3}+\cdots$ رئيسي $\Leftarrow$ $z=0$ شاذة أساسية للتابع f.

f تحليلي في القرص $0\le||z||$ باستثناء النقطة $z=0$ وبالتالي يمكن تطبيق نظرية الرواسب

$$res(f,a)=\frac{3}{2}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{3}{2}\right)=3\pi i$$

تطبيقات نظرية الرواسب في حساب التكاملات الحقيقية

ا. **التكامل من الشكل:**

$$\boldsymbol{I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta\,, \sin\theta)d\theta}$$

حيث f كسر جبري عادي

ملاحظة: شرط ضروري أن يكون التكامل بين $[0,2\pi]$

$$z = e^{i\theta} \quad : \quad z \in ||z|| = 1$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{ie^{iz}} = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$I = \oint_{||z||=1} \frac{f(z)dz}{iz}$$: f كسر جبري عادي في z

ملاحظة: يجب أن يكون الناتج طبيعي (لا يحتوي i).

مثال:

$$\boldsymbol{I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}}$$

$$3 - 2\cos\theta + \sin\theta = 3 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{2iz}(6iz - 2iz^2 - 2i + z^2 - 1)$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

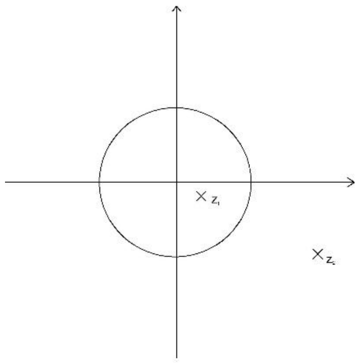
$$I=\oint_{||z||=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{1}{2iz}\left((1-2i)z^2+6iz-2i-1\right)}$$

$$=2\oint_{||z||=1}\frac{dz}{(1-2i)z^2+6iz-2i-1}$$

نحل حسب مبرهنة الرواسب

$$\Delta=(6i)^2-4(1-2i)(-2i-1)$$

$$=-36+20=-16\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\pm i4$$



$$\Rightarrow z=\frac{-6i\mp 4i}{2(1-2i)}=\begin{cases} z_1=-\frac{i}{1-2i}=\frac{2-i}{5}\\ z_2=-\frac{5i}{1-2i}=2-i\end{cases}$$

f تحليلي في $||z||\le 1$ باستثناء القطب البسيط z_1

$$f=\frac{1}{(1-2i)z^2+6iz-2i-1}=\frac{g}{h}$$

$$h'(z)=(1-2i)z+6i$$

$$h'(z_1)=4i$$

$$res(f,z_1)=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}$$

$$I=2\pi i(2)\left(-\frac{i}{4}\right)=\pi$$

مثال:

$$\boldsymbol{I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2x}{5-4\cos x}dx}$$

$$z=e^{ix}:z\in||z||=1$$

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

$$f=\frac{\cos 2x}{5-4\cos x}=\frac{2\cos^2 x-1}{5-4\cos x}$$

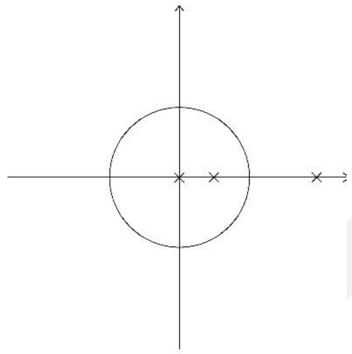
$$=\frac{\frac{1}{2}\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)-1}{5-2\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{\frac{5z-2z^2-2}{z}}$$

$$=\frac{z^4+1}{2z(5z-2z^2-2)}$$

$$\Rightarrow I=\oint_{||z||=1}\frac{z^4+1}{2z(5z-2z^2-2)}\frac{dz}{iz}$$

$$=\frac{1}{2i}\oint_{||z||=}\frac{z^4+1}{z^2(5z-2z^2-2)}dz$$

النقاط الشاذة:



$z=0$ قطب من الدرجة ٢

حلول المعادلة $5z-2z^2-2=0$ وهي $2,\frac{1}{2}$ وهما قطبان بسيطان

fتحليلي في القرص $||z||\leq 1$ عدا النقطتين $0,\frac{1}{2}$

$$z=0\Rightarrow f=\frac{\frac{z^4+1}{-2z^2+5z-2}}{z^2}$$

$$res(f,0)=\frac{g'(0)}{1!}=-\frac{5}{4}$$

$$z=\frac{1}{2}\Rightarrow f(z)=\frac{\left[\frac{z^4+1}{z^2}\right]}{(-2z^2+5z-2)}\quad\Rightarrow res\left(f,\frac{1}{2}\right)=\frac{g}{h'}\quad\Rightarrow$$

$$h'=-4z+5\Rightarrow res\left(f,\frac{1}{2}\right)=\frac{\left[\left(\frac{1}{16}+1\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]}{-2+5}=\frac{17}{3(4)}$$

الان نكتب قانون الرواسب:

$$I=\frac{1}{2i}\left[2\pi i\left(-\frac{5}{4}+\frac{17}{4(3)}\right)\right]=\frac{\pi}{6}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي